היסקים דדוקטיביים

פרק 10 **לוגיקה של קבוצות**

10.1

אנשים שאוהבים את תל־אביב הם כולם גזעיים.
אין שום אלוף שחמט שהוא גזעי.

∴ כל אלוף שחמט אינו אוהב את תל־אביב.

האם היסק זה תקף? כדי להחליט על כך עלינו לענות על השאלה הזו: אם מקבלים את ההקדמות, האם יהיה זה סביר לא לקבל את המסקנה? כדי לראות שלא, הבה נניח שההקדמות אמיתיות, ונניח גם שהמסקנה שקרית – כלומר, נניח שיש איזשהו אלוף שחמט שהוא גם אוהב את תל־אביב. מאחר שהוא אוהב את תל־אביב, לפי ההקדמה הראשונה הוא חייב להיות גזעי. אבל זה סותר את ההקדמה השנייה, האומרת שאין שום אלוף שחמט שהוא גזעי. נראה, לכן, שברגע שמקבלים את ההקדמות, לא ניתן להישאר עם ההנחה שהמסקנה שקרית. זאת אומרת שלא סביר לקבל את ההקדמות בלי לקבל את המסקנה. לפיכך, הטיעון תקף.

אבל טיעון זה הוא תקף באופן מיוחד. כזכור (מפרק 8) כל מה שדרוש כדי שטיעון יהיה תקף הוא שלא יהיה סביר לקבל את ההקדמות בלי לקבל גם את המסקנה. אולם במקרה הזה, ברגע שמקבלים את הקדמות הטיעון, המסקנה אינה רק סבירה, אלא אף בלתי נמנעת. זאת אומרת, מצב שבו ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית **אינו יכול להתקיים כלל!** קשר התמיכה בין ההקדמות לבין המסקנה הוא לא רק עניין של סבירות, אלא עניין של הכרחיות.

הגדרה

טיעון הוא **תקף דדוקטיבית**, או **תקף באופן דדוקטיבי**, אם יהיה זה לגמרי בלתי אפשרי שההקדמות כולן אמיתיות בעוד המסקנה שקרית.

שימו לב שתקפות דדוקטיבית חזקה יותר מתקפות פשוטה, שכן טיעון עשוי להיות תקף במובן הכללי מבלי להיות תקף דדוקטיבית. דוגמא לכך ניתן לראות בפרק הקודם:

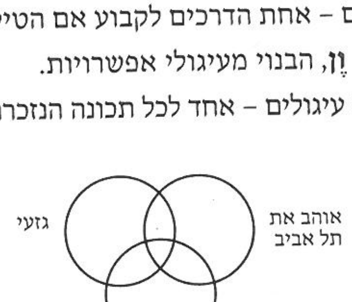
הרופאה שלי אומרת שיש לי זרוע שבורה.

∴ יש לי זרוע שבורה.

לא סביר לדחות את הדעה של הרופאה שלי בנושא הזה, כי מעטים הסיכויים שהיא טועה. אך ככל שסיכויים אלה קטנים, הם בכל זאת קיימים; אין זה לגמרי בלתי אפשרי שהיד שלי אינה שבורה בעת שהרופאה טוענת את ההפך. לפיכך הטיעון אינו תקף דדוקטיבית, אף שהוא תקף במובן הפשוט.

לעומת זאת, הטיעון על אלופי השחמט אינו רק תקף במובן הפשוט, הוא אף תקף דדוקטיבית. גם אם נתאמץ, ואפילו אם נפעיל את כל כוח הדמיון שלנו, לא נוכל לתאר מצב שבו ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית (לפחות לא באופן עקבי, מבלי לסתור את עצמנו). אבל איך אפשר להיות בטוחים בקביעה כזו? איך אפשר לדעת בוודאות שמצב כזה פשוט אינו אפשרי? כשמדובר בטיעון הבנוי על יחסים בין קבוצות – קבוצת כל אלופי השחמט, קבוצת כל מי שאוהבים את תל־אביב, קבוצת כל הגזעיים – אחת הדרכים לקבוע אם הטיעון תקף דדוקטיבית היא על־ידי שימוש ב**תרשים וֶן**, הבנוי מעיגולי אפשרויות.

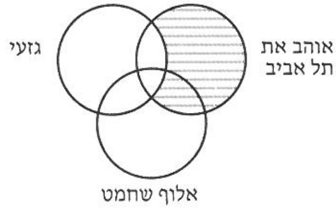
מתחילים עם שלושה עיגולים – אחד לכל תכונה הנזכרת בטיעון – אשר חופפים באופן חלקי:



ניתן לחשוב על כל עיגול כאילו הוא מקיף את כל מה שיכול להיות בעל התכונה

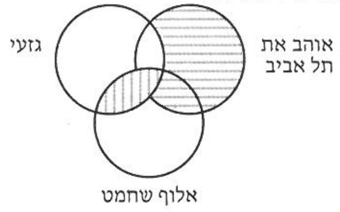
הרשומה בצדו. התרשים הזה מתייחס לכל האפשרויות לגבי קיום דברים בעלי צירוף אפשרי כלשהו של שלוש התכונות, ובשלב ההתחלתי הזה עדיין הכול ייתכן.

בשלב הבא מתחילים לתקן את תמונת האפשרויות לפי המידע המצוי בהקדמות. אם האוהבים את תל־אביב כולם גזעיים, מה זה אומר לגבי האפשרויות? לפי הקדמה זו, לא ייתכן שמישהו יהיה אוהב את תל־אביב ולא יהיה גזעי. ניתן לבטא זאת בתרשים, על־ידי קִווקוּו אותו שטח המקיף את כל מה שיכול להיות אוהב את תל־אביב מבלי להיות גזעי:



כך מציינים את מה שנאמר בהקדמה הראשונה: שמישהו שאוהב את תל־אביב ואינו גזעי אינו בגדר האפשרי. באופן כללי קִווקוּו שטח מציין שמה ששייך לאותו שטח הוצא מכלל האפשרויות.

קיימת הקדמה נוספת, שלפיה לא ייתכן אלוף שחמט גזעי. כדי לציין זאת בתרשים, נוסיף ונקווקוו עכשיו את השטח של מה שיכול להיות גם אלוף שחמט וגם גזעי ביחד, כפי שנעשה בתרשים הבא:



כך אנחנו מוציאים מכלל האפשרויות את כל מה שיכול להיות שני הדברים גם יחד.

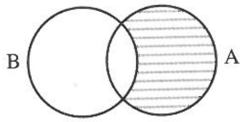
עכשיו תמונת האפשרויות מתוקנת בהתאם להקדמות. כלומר, התרשים מציג כעת את כל המצבים האפשריים **שבהם כל ההקדמות אמיתיות**. האם בנסיבות אלה המסקנה חייבת להיות אמיתית? המסקנה אומרת שכל אלוף שחמט אינו אוהב את תל־אביב. ובאמת, לפי התרשים, אנחנו רואים שכל דבר שיכול להיות אלוף שחמט כבר לא יכול להיות אוהב את תל־אביב; דבר כגון אלוף שחמט שהוא גם אוהב את תל־אביב כבר הוצא מכלל האפשרויות על־ידי ההקדמות (כלומר, השטח של כל מה שיכול להיות גם אלוף שחמט וגם אוהב את תל־אביב ביחד מקווקוו כבר לגמרי).

על־כן, לפי התרשים רואים שהטיעון אכן תקף באופן דדוקטיבי.

שיטה זו של עיגולי אפשרויות אינה מתאימה לכל טיעון, אלא רק לטיעונים שבהם הטענות מתייחסות ליחסים בין קבוצות (או תכונות). ניתן להגדיר ארבע צורות של טענות כאלה, שהן כולן **הכללות**:

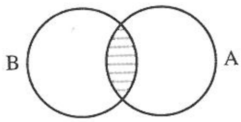
(1) כל דבר מסוג A הוא דבר מסוג B.

טענה כזו אומרת שלא ייתכן A שאינו B, ומציינים זאת כך:



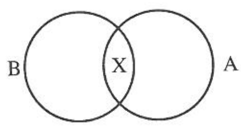
(2) כל דבר מסוג A אינו דבר מסוג B.

טענה כזו אומרת שלא ייתכן A שהוא גם B ומציינים זאת כך:



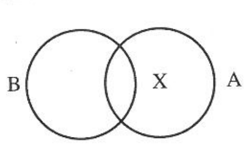
(3) יש דבר (לפחות אחד) מסוג A שהוא גם מסוג B.

טענה כזו אינה עוסקת במה שלא ייתכן, אלא במה שקיים; היא אומרת שקיים איזשהו A שהוא גם B ומציינים זאת כך:



(4) יש דבר מסוג A שאינו דבר מסוג B.

טענה כזו אומרת שקיים איזשהו A שאינו גם B ומציינים זאת כך:



נבחן עתה שתי דוגמאות לבדיקת טיעונים על־פי שיטה זו. דוגמא ראשונה:

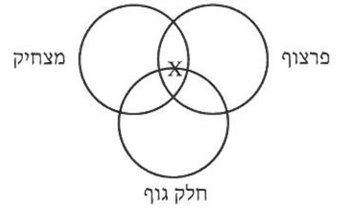
יש פרצופים מצחיקים.

כל פרצוף הוא חלק מהגוף.

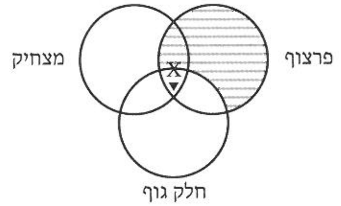
∴ יש חלקי גוף מצחיקים.

כדי לציין את מה שנאמר בטענה הראשונה, עלינו לרשום X בשטח המשותף לפרצופים ולדברים מצחיקים. אבל עדיין איננו יודעים אם אותו פרצוף מצחיק,

שאמור להיות קיים, הוא אכן חלק של גוף או לא. נרשום, לכן, את ה־X על גבול העיגול של חלקי הגוף, באופן שאינו מחייב – לא לכאן ולא לכאן:



כדי לציין את הנאמר בטענה השנייה (כל פרצוף הוא חלק מהגוף), עלינו לקווקוו את השטח של כל מה שיכול להיות פרצוף בלי להיות גם חלק של גוף:



קווקוו זה מחייב שאותו X שציירנו על הגבול של עיגול חלקי הגוף אינו יכול להיות מחוץ לעיגול הזה. בכך הקווקוו דוחף למעשה את ה־X מהגבול אל תוך השטח של מה שיכול להיות חלק של גוף. מכאן רואים כי בנסיבות שבהן ההקדמות כולן אמיתיות, גם המסקנה אמיתית.

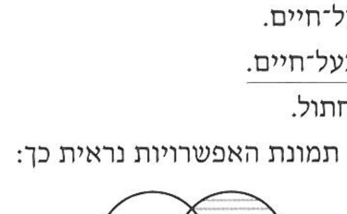
דוגמא שנייה:

כל כלב הוא בעל־חיים.

כל חתול הוא בעל־חיים.

∴ כל כלב הוא חתול.

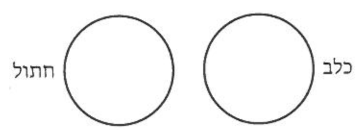
במקרה של הקדמות אלה, תמונת האפשרויות נראית כך:



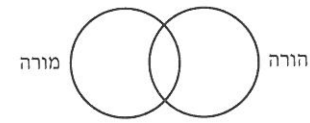
האם המסקנה חייבת להיות אמיתית במצב כזה? רואים, לפי המקום המסומן, שכלב שאינו חתול הוא עדיין בגדר האפשרי. לכן ההיסק אינו תקף.

ון ואוילר

בניגוד לשיטת התרשימים של ון, בשיטת העיגולים של אוילר, כל עיגול מקיף רק את הדברים הנושאים למעשה את התכונה – לא כל הדברים היכולים, עקרונית, לשאת את התכונה. במלים אחרות, תרשימי ון מתייחסים לכל הדברים האפשריים, ואילו תרשימי אוילר מתייחסים אך ורק לדברים הקיימים. למשל, כדי לתת ביטוי בשיטת אוילר ליחס בין כלבים ותחולים, מציירים שני עיגולים אשר אינם חופפים כלל (היות שיש כלבים ויש תחולים, אך אין דבר שהוא גם כלב וגם תחול בעת ובעונה אחת):

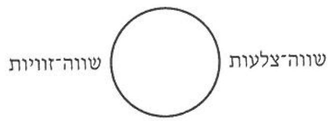


היחס בין הורים למורים מתבטא בעיגולים החופפים חלקית:

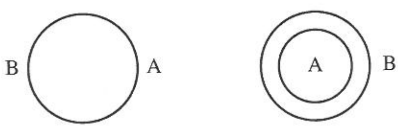


היחס בין מורים לבעלי־חיים מתבטא בעיגול אחד שכולו בתוך עיגול אחר:

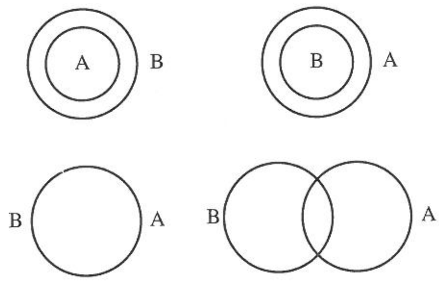
והיחס בין משולשים שווי־צלעות למשולשים שווי־זוויות מתבטא בעיגולים חופפים בדיוק:



שיטת אוילר מועילה בעיקר כאשר אנחנו יודעים בדיוק מהם היחסים בין הדברים הנדונים (כמו בדוגמאות הנ"ל). אבל קשה להשתמש בעיגולי אוילר כאשר אין לנו כל המידע הרלוונטי. אם אנחנו יודעים רק שכל A הוא B – למשל, שכל חבר של זלמן הוא חבר של יוסי – אז איננו יכולים להכריע בין שתי אפשרויות:



או, אם אנחנו יודעים רק שיש A שהוא B – למשל, שלזלמן יש חבר שהוא חבר של יוסי – אז יש ארבע אפשרויות:



לכן, כדי להעריך תקפות של טיעונים, עדיף להשתמש בתרשימי ון.

שאלה למחשבה:

האם יש טיעון תקף אשר תקפותו אינה באה לידי ביטוי בתרשים ון?

תרגילים

1. נסו לנסח כל אחת מהטענות הבאות באחת מארבע צורות ההכללה אשר ניתן לייצג בתרשים ון. ציירו תרשים לכל טענה. אם אי־אפשר, הסבירו מדוע.

(א) כל הטמבלים עזבו את המסיבה.

(ב) אין אף תלמיד בספרייה.

(ג) אין ספרייה.

(ד) יש תולעת בתפוח.

(ה) תלמידים אחדים קראו את הספר.

(ו) מורה אחד לא ראה את יוסי.

(ז) יוסי רואה מורה.

(ח) שום תלמיד לא דיבר.

2. קבעו לפי תרשים ון אם הטיעון תקף:

(א) יש טמבל בכיתה.

כל אחד בכיתה לומד לוגיקה.

∴ יש טמבל שלומד לוגיקה.

(ב) כל טמבל יכול לעוף.

אין אף טמבל שיכול לרכוב על אופניים.

∴ כל אחד שיכול לעוף אינו יכול לרכוב על אופניים.

(ג) מורה נפל על הראש.

איש חשוב נפל על הראש.

∴ קיים איש חשוב שהוא מורה.

(ד) אין תלמיד במסעדה.

יש תלמיד בגן.

∴ יש תלמיד בגן שאינו במסעדה.

(ה) אין תלמיד במסעדה.

יש תלמיד בגן.

∴ יש תלמיד במסעדה שאינו בגן.

מבט מלמעלה

כדי לבדוק אם טיעון הוא תקף, ניתן לפעמים להשתמש בתרשים ון, שבו באים לידי ביטוי יחסים בין קבוצות. היסק שהוא תקף לפי תרשים ון אינו תקף רק במובן הפשוט, אלא גם מבחינה דדוקטיבית. בשני הפרקים הבאים נכיר סוגים נוספים של טיעונים אשר יכולים להיות תקפים באופן דדוקטיבי, אף־על־פי שתרשימי ון אינם מתאימים להם.